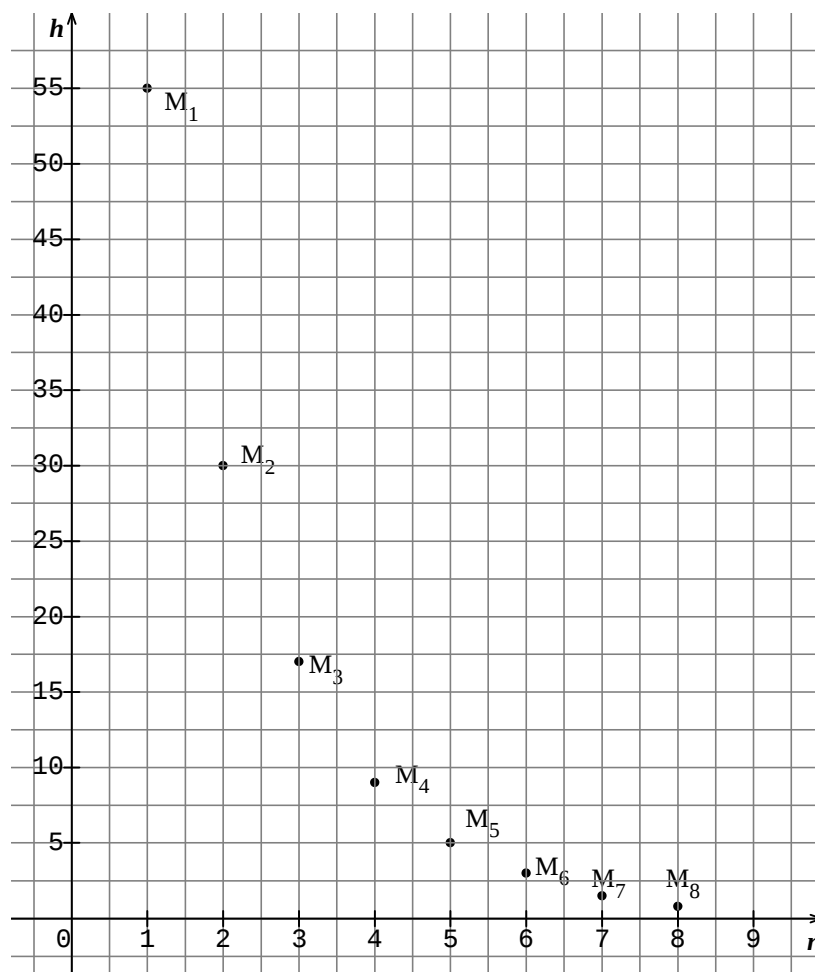


Exercice 1 : Sur 8 points

Numéro du rebond : n_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Hauteur du rebond : h_i	55	30	17	9	5	3	1,5	0,8

1)



Un ajustement affine ne paraît pas justifié car les points ne sont pas alignés.

2)

n_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_i = \ln(h_i)$	4,0	3,4	2,8	2,2	1,6	1,1	0,4	-0,2

3) Un ajustement affine paraît justifié car les points P_i sont alignés.

Dessin page suivante.

4) Recherche d'un ajustement affine

a) G_1 le point moyen du sous-nuage formé par les points P_1, P_2, P_3 et P_4

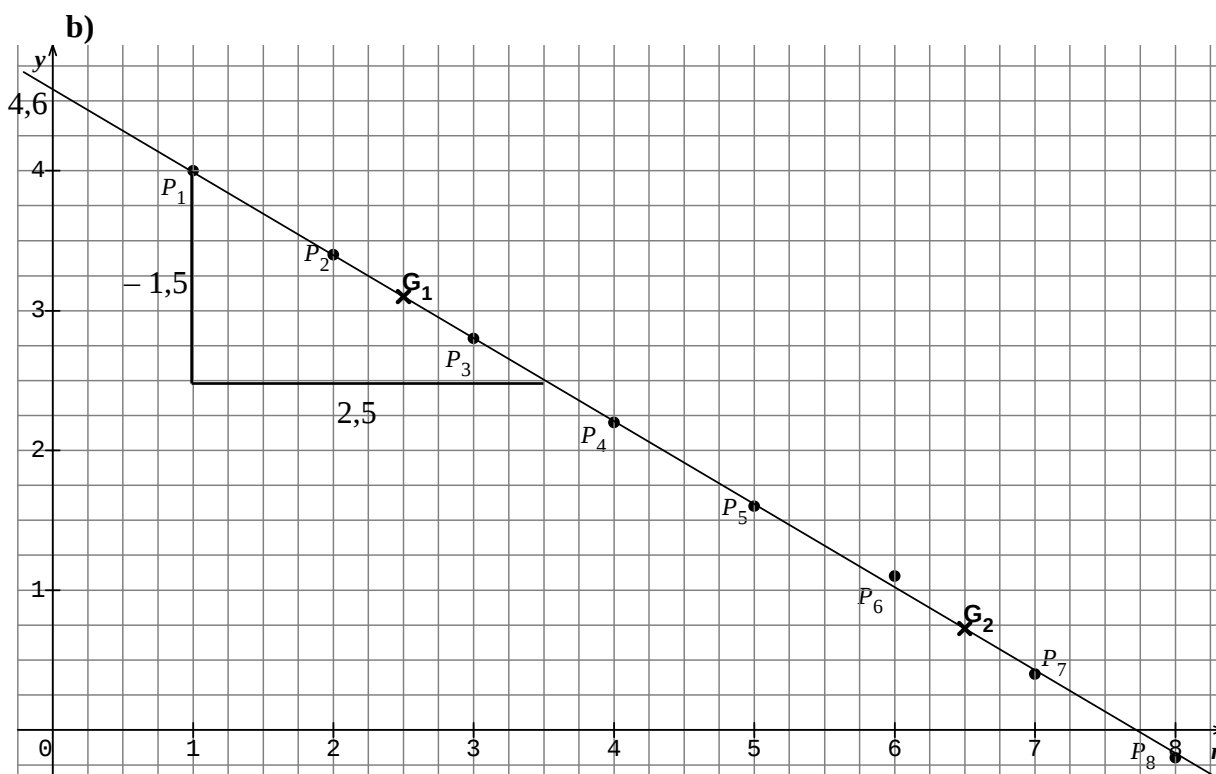
$$n_{G1} = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}{4} = \frac{1 + 2 + 3 + 4}{4} = 2,5$$

$$y_{G1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} = \frac{4,0 + 3,4 + 2,8 + 2,2}{4} = 3,1$$

 G_1 a pour coordonnées (2,5 ; 3,1) G_2 le point moyen du sous-nuage formé par les points P_5, P_6, P_7 et P_8 .

$$n_{G2} = \frac{5 + 6 + 7 + 8}{4} = 6,5$$

$$y_{G2} = \frac{1,6 + 1,1 + 0,4 + 0,2}{4} = 0,725$$

 G_2 a pour coordonnées (6,5 ; 0,725)

c) Graphiquement on lit :

Ordonnée à l'origine : 4,6

Coefficient directeur : $\frac{-1,5}{2,5} = -0,6$ 5) En utilisant le résultat de la question 4)c), on trouve l'équation de (G_1G_2) qui est un ajustement affine de la situation.

$$y = -0,6n + 4,6.$$

Pour avoir la hauteur en fonction de n , on remplace y par $\ln(h)$.

$$\ln h = -0,6n + 4,6$$

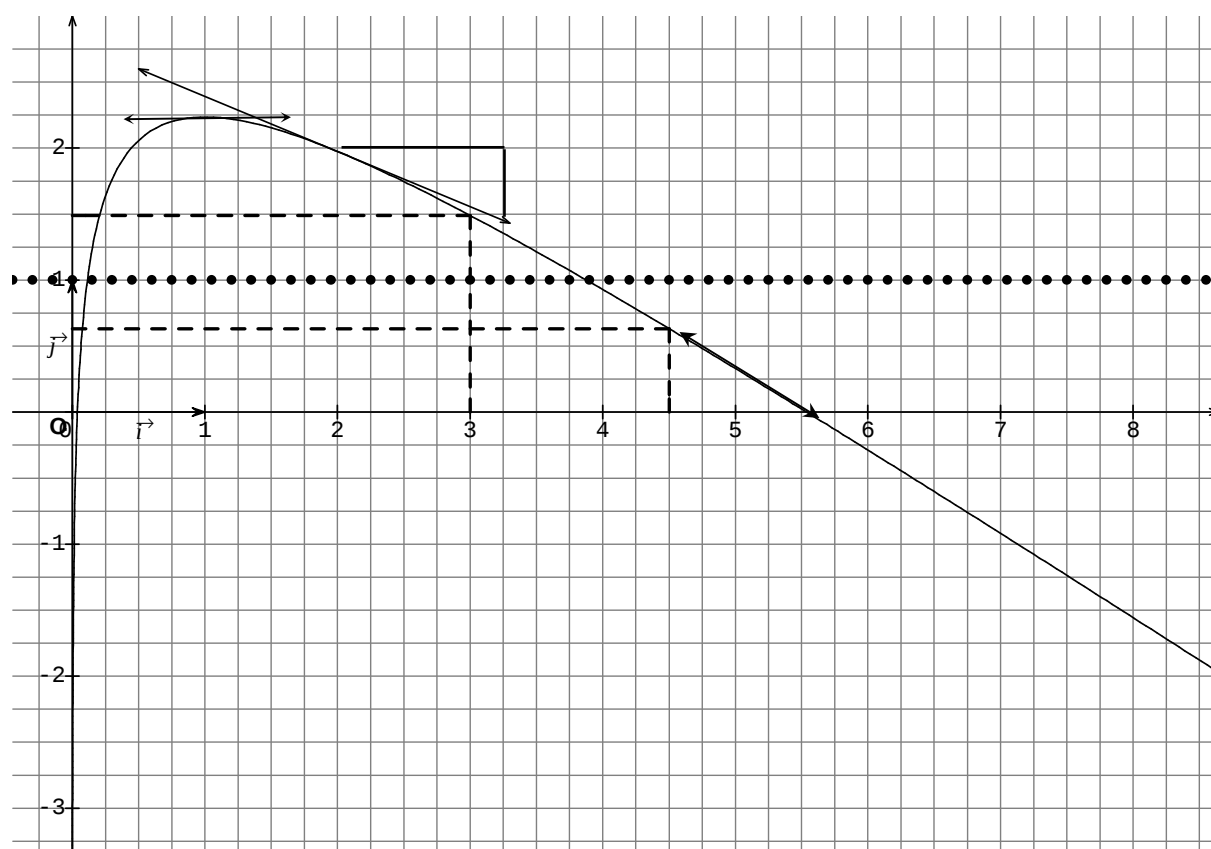
$$h = e^{-0,6n + 4,6}$$

- 6) On cherche à résoudre $e^{-0,6n+4,6} < 0,1$
 $-0,6n + 4,6 < \ln 0,1$ car $\ln$ est une fonction croissante sur $]0; +\infty[$.
 $-0,6n < \ln 0,1 - 4,6$
 $n > \frac{\ln 0,1 - 4,6}{-0,6}$
 $n > 11,5$

À partir du 12^{ème} rebond, la hauteur estimée de celui-ci est inférieure à un millimètre.

Exercice 2 : Sur 12points

Partie 1 : lecture graphique



- a) Le point d'abscisse 3 de la courbe C_f a pour ordonnée 1,5 donc $f(3) = 1,5$
 Le point d'abscisse 4,5 de la courbe C_f a pour ordonnée 0,6 donc $f(4,5) = 0,6$;
- b) La courbe C_f coupe l'axe des abscisses 2 fois en 0,05 et en 5,5 donc l'équation $f(x) = 0$ admet **2 solutions** : $x = 0,05$ et $x = 5,5$.
- c) On trace la droite d'équation $y = 1$ et on cherche pour quelles valeurs de x , la courbe C_f est en dessous ou sur la droite.
 $S =]0; +0,2] \cup [3,8; +\infty[$.
- d) $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 2.
 $f'(2) = \frac{-0,5}{1,25} = -0,4$.

- e) Rechercher les solutions de l'équation $f'(x) = 0$, reviens à chercher les abscisses des points de la courbe C_f qui admettent une tangente horizontale.
Il n'y en a qu'un pour $x = 1$.
Donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution : $x = 1$.
- f) L'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \geq 0$ correspond à l'ensemble des valeurs de x où f est croissante.

$$S =]0 ; 1].$$

- g) $f'(5)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 5.

$$f'(5) = -\frac{0,3}{0,5} = -0,6.$$

Partie 2: étude d'une fonction

a) $f(x) = \ln(x) - \ln(x+2) - \frac{2}{3}x + 4$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (-\ln(x+2)) = -\ln 2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{2}{3}x + 4 = 4 \end{array} \right\} \text{ soit } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty.$$

On en déduit que la courbe C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

b) $f(x) = \ln(x) - \ln(x+2) - \frac{2}{3}x + 4$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) - \frac{2}{3}x + 4 \quad \text{car } \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\right) - \frac{2}{3}x + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \ln 1 = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\right) = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{3}x + 4\right) = -\infty \end{array} \right\} \text{ soit } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

c) $p(x) = x^2 + 2x - 3$.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \times (-3) \times 1 = 16 = 4^2$$

L'équation admet 2 solutions :

$$x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$$

Le signe du trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines.

Donc $p(x) > 0$ sur $]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$.

$p(x) = 0$ pour $x = -3$ et $x = 1$

$p(x) < 0$ sur $]-3; 1[$.

d) f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} - \frac{2}{3}$$

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - 3x - 2x(x+2)}{3x(x+2)}$$

$$f'(x) = \frac{3x + 6 - 3x - 2x^2 - 4x}{3x(x+2)}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 4x + 6}{3x(x+2)}$$

$$f'(x) = \frac{-2(x^2 + 2x - 3)}{3x(x+2)}$$

$$f'(x) = \frac{-2p(x)}{3x(x+2)}$$

e) sur $]0; +\infty[$, $3x(x+2) > 0$, donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-2p(x)$.

Le signe de $p(x)$ sur $]0; +\infty[$ est $p(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$.

$p(x) = 0$ pour $x = 1$

$p(x) < 0$ sur $]0; 1[$.

Donc en tenant compte de -2 , on en déduit le signe de $f'(x)$ et les variations de f .

Sur $]0; 1[$, $f'(x) > 0$ et donc f est croissante.

Pour $x = 1$, $f'(x) = 0$ et donc f admet une tangente horizontale.

Sur $]1; +\infty[$, $f'(x) < 0$ et donc f est décroissante.